

---

## Contrôle continu 3

---

**Exercice 1** (Questions de cours, 3pt). Soit  $\Phi: E \longrightarrow E$  un endomorphisme d'un  $K$ -espace vectoriel.

1. Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre de  $\Phi$ .
2. On suppose que  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux valeurs propres distinctes de  $\Phi$ . Montrer que leurs espaces propres associés sont en somme directe :  $E_\lambda \oplus E_\mu \subset E$ .

**Exercice 2** (6pt). Soit  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . On considère les suites  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases}$$

1. On introduit

$$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la relation matricielle qu'il y a entre  $U_n$ ,  $U_{n+1}$  et  $A$ , et exprimer  $U_n$  en fonction de  $A^n$  et  $U_0$ .

2. Déterminer  $D \in M_2(\mathbb{R})$  diagonale et  $P \in M_2(\mathbb{R})$  inversible telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

3. Pour tout  $n \geq 2$ , déterminer l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $x_n$  et de  $y_n$  en fonction de l'entier  $n$  et les valeurs initiales  $x_0$  et  $y_0$ .

**Exercice 3** (6pt). Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice  $B$  est-elle inversible ? Déterminer son rang.
2. Calculer le polynôme caractéristique de  $B$ , et en déduire toutes les valeurs propres de  $B$ , avec leur ordre de multiplicité.
3. Déterminer les sous-espaces propres associés.
4. Justifier que  $B$  est diagonalisable dans  $M_3(\mathbb{R})$ , et déterminer  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $B = PDP^{-1}$ .

Tournez la page svp !  $\rightarrow$

**Exercice 4** (6pt). Soient  $a, b, c$  trois réels et considérons la matrice

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que

$$\det V_3 = (b - a)(c - a)(c - b).$$

(*Indication.* Faire des opérations sur les lignes pour faire apparaître deux zéros dans la première colonne).

2. Pour quels triplets  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  la matrice  $V_3$  est-elle inversible ?

Supposons maintenant que  $a, b, c$  sont trois réels et considérons l'application

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad F(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}.$$

3. Montrer qu'il existe des réels  $p, q, r$  qui ne dépendent pas de  $x$  tels que

$$F(x) = (\det V_3)x^3 + px^2 + qx + r.$$

(*Remarque.* Il n'est ni utile ni nécessaire d'avoir une expression très développée de  $p, q$  et  $r$ . Ce qui est essentiel est que  $p, q, r$  sont indépendants de  $x$ .)

4. Justifier que  $F(a) = F(b) = F(c) = 0$ . En déduire que si  $a, b, c$  sont trois réels *distincts les uns des autres*, alors

$$F(x) = (\det V_3) (x - a) (x - b) (x - c).$$

5. Pour quels quadruplets  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ , la matrice

$$V_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? (*Indication.* Distinguer deux cas : soit  $a, b, c$  sont distincts les uns des autres, soit deux parmi  $a, b, c$  sont égaux.)